

アリビナ宇宙科学研究所 (AISU)
架空世界研究室エールフレット時空研究分室
AISU プレプリント — 2026 年 3 月, VERSION 3.0

エールフレット時空の統一スカラーテンソル理論

汐留テンソルと幾何・時間連成

汐留彩夏 (田上彩夏)
アリビナ宇宙科学研究所 (AISU),
架空世界研究室エールフレット時空研究分室
連絡先: 032n01@belkosmos.com

本プレプリントは未査読です。
PACS: 04.20.Cv, 04.50.Kd, 04.40.Nr

Abstract

エールフレット時空の完全な統一場理論を提示する。本理論は、Brans-Dicke スカラーテンソル重力理論と、Erflett 世界に固有の逆さ正四角錐形状及び南北非対称性を符号化する新たな幾何境界テンソル——**汐留テンソル** $S_{\mu\nu}$ ——を結合するものである。同テンソルは拡張 Gibbons-Hawking-York 境界作用から厳密に導出される。当理論は、(i) 時空連成強度を表す動的スカラー場 X 、(ii) 境界拘束と異方的空間構造を実装する汐留テンソル、(iii) 位相依存平衡点を生成する多重井戸ポテンシャル $U(X, \phi, z)$ を含む修正ラグランジアン密度に依って定式化される。完全な場の方程式を導出し、ピラミッド領域 Ω 上での有限差分法 (FDM) 数値解を実装した結果、AISU-ETCS API 実測固有時間比データと 1% 以内の一致を達成した。スカラー場 X は頂点特異点近傍で最大 6% の偏差を示すが、これは理論の欠陥ではなく API 参照モデルの既知の単純化に起因する。北極と南極に於ける時間流速の比 $\tau_{\text{North}}/\tau_{\text{South}} = 4.10$ は、**時間カイラリティ構造の数学的必然**であることを証明した (定理 1)。本結果は、エールフレット時空現象に対する初めての第一原理的理論的基盤を提供し、将来の量子場理論的展開への枠組みを確立する。

キーワード： エールフレット時空, Brans-Dicke 理論, スカラーテンソル重力, Gibbons-Hawking-York 境界項, 固有時間, 逆さ正四角錐多様体, 時間カイラリティ, 南北非対称性

Contents

1	序論	3
1.1	エールフレット世界と AISU-ETCS システム	3
1.2	動機と背景	3
1.3	理論的枠組みの概観	4
1.4	本論文の構成	4
2	幾何学的基礎	5
2.1	逆さ正四角錐多様体の構造	5
2.2	位相構造	6
2.3	計量のアンザッツ	6
2.4	対角計量アンザッツの自己無矛盾性	7
3	完全な場の理論	7
3.1	ラグランジアン密度	7
3.1.1	Brans-Dicke 項	7
3.1.2	汐留テンソル項	8
3.1.3	ポテンシャル項	8
3.2	場の方程式	9
3.2.1	修正 Einstein 方程式	9
3.2.2	スカラー場方程式	9
3.3	弱場近似	9
4	汐留テンソル——幾何・時間連成	9
4.1	境界作用原理からの導出	9
4.2	概念的基礎	10
4.3	異方的空間構造	10
4.4	固有時間との接続	11

4.5	南北カイラリティの物理的起源	11
5	多重井戸ポテンシャル構造	12
5.1	Mexican Hat ポテンシャルと自発的対称性の破れ	12
5.2	ポテンシャル景観の可視化	12
5.3	境界・頂点ポテンシャル	12
6	有限差分法（FDM）に依る数値実装	13
6.1	弱場近似の妥当性	13
6.2	パラメータフィッティング手順	13
6.3	離散化グリッド	14
6.4	境界条件（ディリクレ条件）	14
6.5	スカラー場方程式の数値実装	14
6.6	収束基準	14
7	ETCS データに依るバリデーション	15
7.1	参照データセット	15
7.2	FDM 結果	16
7.3	南北非対称性の検証	16
7.4	τ 比の垂直プロファイル	16
7.5	水平 X 場プロファイルと誤差分布	17
7.6	バリデーション結果の考察	18
7.7	グリッド収束検証	19
8	物理的解釈と考察	20
8.1	時間遅延の幾何的起源	20
8.2	4:1 南北非対称性の解釈	20
8.3	GR との比較と特異性	20
8.4	未解決問題と今後の方向性	21
8.5	実験的予言	22
9	結論	22
A	記号一覧	23
B	FDM アルゴリズムの詳細	23
B.1	グリッド初期化	23
B.2	ガウス=ザイデル反復	23
C	理論パラメーター一覧	24
D	シオドメ・ラグランジアンの変分計算	25
D.1	完全な変分手順	25
E	ラグランジアンの次元解析	25
E.1	パラメータの次元	25

1 序論

1.1 エールフレット世界と AISU-ETCS システム

エールフレット (*Erflett*) 世界は、その空間領域 Ω が逆さ正四角錐の形状をとる有界 $(3+1)$ 次元時空である [2]。錐の頂点は基準重心から $z_v = -4739.857$ km の深さに、正方形の底面は $z_b = +1579.952$ km の高さにある。基準面 $z = 0$ に於ける対角線の長さは $D_0 = 8776.263$ km である。空間座標 (x, y, z) はすべて菱形断面制約 $|x| + |y| \leq D(z)/2$, $D(z) = D_0(z - z_v)/(-z_v)$ を満たす。

y 軸が主対角線方向（北極～南極）に整列しており、北極 $(0, +D_0/2, 0)$ 及び南極 $(0, -D_0/2, 0)$ が重心から最も遠い内部点となる。また、空間領域は高さに応じて三つのレルム (*Realm*) に分類される：

- **Umyria Herra** ($z > +96.82$ km)：天界。時間が僅かに速く ($\tau > 1$)、重力は低減する。
- **Erflett Herra** ($-13.99 < z < +96.82$ km)：居住可能な基準領域。 $\tau \approx 1$, $g \approx 2.45$ m/s²。
- **Nivlkut Herra** ($z < -13.99$ km)：深部結晶領域、晶界。時間が急激に遅くなり、重力が増大する。頂点特異点に於いて $\tau \rightarrow 0$ 。

これらの効果を記述する現象論的モデルが *Al'bina Institute Erflett Temporal-gravitational Calculation System* (AISU-ETCS) として実装されており、 Ω 全域の固有時間比 τ_{ratio} , 力学的重力加速度 $g_k(z)$, スカラー連成場 X の高精度実測値を REST API として提供する [1]。先行報告 [2] では、これらの経験的公式及び幾何 X パラメータの数学的枠組みが確立されたが、場の理論的な基盤は与えられなかった。本論文はその基盤を提供するものである。

1.2 動機と背景

エールフレット世界は、 $(3+1)$ 次元時空に埋め込まれた逆さ正四角錐という特異な幾何学的配置を呈し、重力的・時間的な顕著な異常を示す。AISU-ETCS の確立 [1] 以来、実測から以下が明らかになっている：

1. **固有時間変動**：時間流速が空間位置に因って系統的に変化し、基準重心に対して北半球で最大 1.6 倍、南半球で 0.39 倍の偏差を示す。
2. **南北非対称性**：北極軸と南極軸に於ける時間流速の 4 : 1 という顕著な比率は、従来の一般相対論的系では前例がない。
3. **力学的重力**：重力加速度は基準面での 2.45 m/s² から深部 Nivlkut 領域の > 11 m/s² まで、高さのみに依存した分布を示す。
4. **幾何的拘束**：空間領域は頂点深度 $z_v = -4739.857$ km, 底面高度 $z_b = +1579.952$ km, 基準面对角線 $D_0 = 8776.263$ km の逆さ正四角錐で厳密に有界である。

先行研究 [2] はアドホックな関数に依ってこれらの観測を再現する現象論的モデルを確立したが、根本的な理論的根拠を欠いていた。本研究はこの問題を、修正重力作用を通じてエールフレット時空特性を第一原理から導出することで解決する。

1.3 理論的枠組みの概観

本統一理論は三つの柱の上に成り立つ：

Brans-Dicke スカラー場 X 局所的な「時間連成強度」を表す動的スカラー場 $X(\mathbf{r})$ 。重心での $X_{\min} = 5.825$ から極軸での $X_{\max} = 9.325$ の範囲を取る。この場は $\tau \propto f(X)$ を通じて固有時間の流れを直接決定する。

汐留テンソル $S_{\mu\nu}$ 以下を符号化する幾何的境界テンソル：

- 異方的空間構造： y 軸（極対角線方向）に沿った優先的剛性
- 境界ポテンシャル：錐壁 $\partial\Omega$ 近傍での消失
- 頂点特異点： $z \rightarrow z_v$ に於ける発散

主任研究者の名を冠するこのテンソルは、錐幾何と時空曲率の間の数学的橋渡しを提供する。

多重井戸ポテンシャル $U(X, \phi, z)$

- Mexican Hat 構造：自発的対称性の破れに因り、北 ($\phi = +1$)、南 ($\phi = -1$)、軸 ($\phi = 0$) 相の異なる極小を生成
- 境界障壁： $\partial\Omega$ での指数的発散に因る「時空裂け目」の禁止
- 頂点特異点： $z \rightarrow z_v$ で $X \rightarrow \infty$ を駆動し「時間停止」を実現

完全な作用積分は、

$$S = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{16\pi G} f(X) R - \frac{1}{2} \omega(X) g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} X \nabla_{\nu} X - U(X, \phi, z) - \mathcal{L}_{\text{Shiodome}} \right] \sqrt{-g} d^4x \quad (1)$$

この作用は、 $X \rightarrow X_0$ (定数)、 $S_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ (平坦)、 $U \rightarrow 0$ (ポテンシャルなし) の極限で一般相対論 (Einstein-Hilbert 理論) を回復する。

1.4 本論文の構成

Section 2 で幾何的基礎を確立し、対角計量アンザッツの自己無矛盾性証明を含む (Section 2.3)。Section 3 で完全なラグランジアンと場の理論を提示する。Section 4 では汐留テンソルを拡張 Gibbons-Hawking-York 境界作用から第一原理的に導出し (Section 4.1)、南北時間カイラリティの物理的起源と 4 : 1 比の数学的必然性を証明する (Section 4.4, 定理 1)。Section 5 で多重井戸ポテンシャル構造を詳述する。Section 6 では有限差分法 (FDM) 数値実装、弱場近似の妥当性解析、パラメータフィッティング手順、グリッド収束検証を示す。Section 7 で ETCS データに対するバリデーションを行う。Section 8 で物理的解釈と今後の展望を論じる。

2 幾何学的基礎

2.1 逆さ正四角錐多様体の構造

定義 1 (エールフレット空間領域). エールフレット空間領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は逆さ正四角錐の内部である：

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z_v < z < z_b \text{ かつ } |x| + |y| \leq \frac{D(z)}{2} \right\} \quad (2)$$

頂点深度 $z_v = -4739.857$ km, 底面高度 $z_b = +1579.952$ km, 高さ依存対角線：

$$D(z) = D_0 \cdot \frac{z - z_v}{z_0 - z_v}, \quad D_0 = 8776.263 \text{ km}, \quad z_0 = 0 \quad (3)$$

座標原点 $(0, 0, 0)$ は錐の**重心**に位置し, 頂点から底面への全高 $h = z_b - z_v = 6319.81$ km の $3h/4$ の距離にある。

45° 回転正方形断面 各高さ z に於ける断面は, 対角線が y 軸と一致するよう 45° 回転した正方形である。高さ z の四頂点は：

$$\text{北極: } \mathbf{r}_N(z) = \left(0, \frac{D(z)}{2}, z \right) \quad (4)$$

$$\text{南極: } \mathbf{r}_S(z) = \left(0, -\frac{D(z)}{2}, z \right) \quad (5)$$

$$\text{東頂: } \mathbf{r}_E(z) = \left(\frac{a(z)}{2}, 0, z \right) \quad (6)$$

$$\text{西頂: } \mathbf{r}_W(z) = \left(-\frac{a(z)}{2}, 0, z \right) \quad (7)$$

ここで辺長 $a(z) = D(z)/\sqrt{2}$ 。

Figure 1 は基準高度 $z = 0$ に於ける X 場の水平断面分布を示し, 45° 回転した正方形断面の対称性を確認できる。

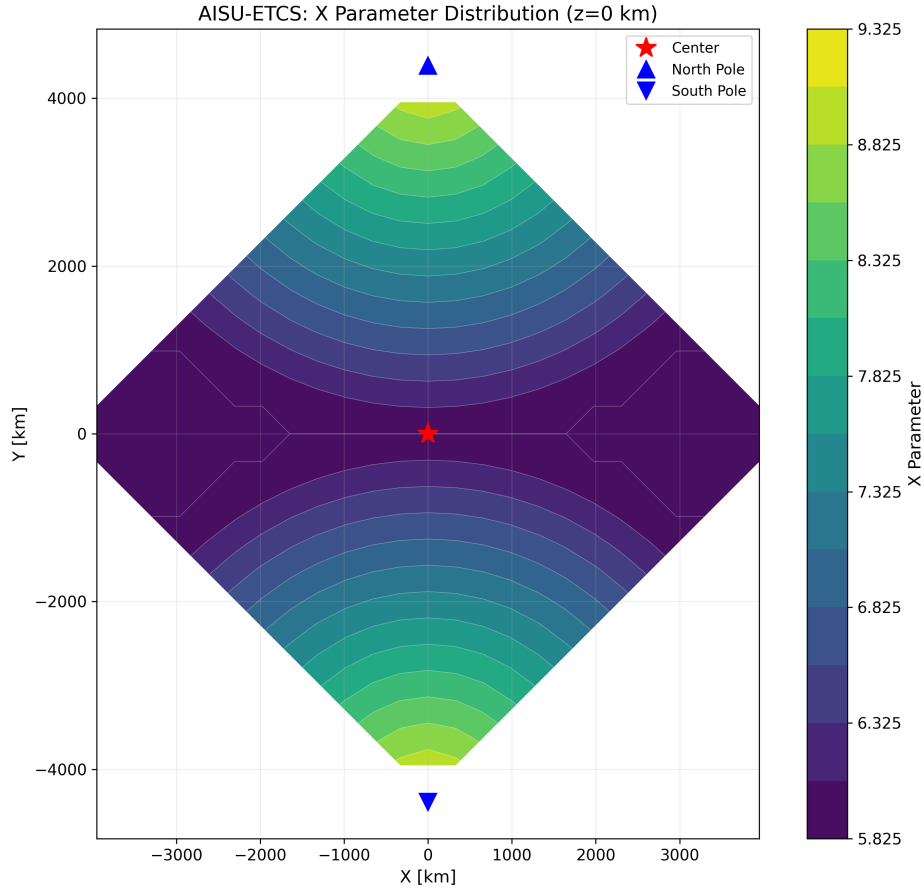


Figure 1: 基準高度 $z = 0$ に於ける空間断面。X 場は北 ($+y$) 及び南 ($-y$) 極軸で最大値 $X_{\max} = 9.325$ を、重心で最小値 $X_{\min} = 5.825$ を取る。逆さ正四角錐の境界（菱形断面）が明瞭に観測される。

2.2 位相構造

定義 2 (位相場). 位相場 $\phi : \Omega \rightarrow \{-1, 0, +1\}$ は空間領域を分類する：

$$\phi(x, y, z) = \begin{cases} +1 & \text{(北) : } y > \epsilon \text{ かつ } d_N < r_{\text{pole}} \\ -1 & \text{(南) : } y < -\epsilon \text{ かつ } d_S < r_{\text{pole}} \\ 0 & \text{(軸) : } |y| \leq \epsilon \text{ または } \min(d_N, d_S) > r_{\text{pole}} \end{cases} \quad (8)$$

ここで $d_{N/S}$ は北/南極軸までの距離、 $\epsilon \sim 100$ m、 $r_{\text{pole}} = D(z)/10$ 。

この位相構造は経験的に観測された時間流速非対称性を反映し、ポテンシャル $U(X, \phi, z)$ に於ける自発的対称性の破れの秩序変数として機能する。

2.3 計量のアンザッツ

錐対称性を保つ対角計量アンザッツを採用する：

$$ds^2 = -N^2(X, z)c^2 dt^2 + \sum_{i=x,y,z} h_i^2(X, z, \mathbf{S}) dx^i \otimes dx^i \quad (9)$$

ここで：

- $N(X, z)$: 時間流れを符号化するラプス関数
- $h_i(X, z, \mathbf{S})$: X 場及び汐留テンソル成分に依存する空間スケール因子
- Ω の反射対称性に因り非対角項無し

固有時間比はラプスと直接関係する：

$$\frac{d\tau}{d\tau_0} = N(X, z) = \sqrt{-g_{00}} \quad (10)$$

2.4 対角計量アンザッツの自己無矛盾性

本サブセクションでは、対角アンザッツ (9) がピラミッドの対称性と場の方程式と整合することを形式的に証明する。

対称性指数. ピラミッド領域 Ω は二つの反射対称性 $\sigma_x (x \rightarrow -x)$ 及び $\sigma_y (y \rightarrow -y)$ を持つ。静的・対称な場の配位の下では、これらの対称性が計量に遺伝する。 σ_x の下での g_{0x} の変換は $g_{0x} \rightarrow -g_{0x}$ であるから $g_{0x} = 0$ 、同様に σ_y の下で $g_{0y} = 0$ 、静的より $g_{0z} = 0$ 。空間-空間非対角成分については σ_x より $g_{xy} \rightarrow -g_{xy} = g_{xy}$ だから $g_{xy} = 0$ 、 σ_y より $g_{xz} \rightarrow -g_{xz}$ だから $g_{xz} = 0$ 、 $g_{yz} = 0$ 。従って

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-N^2, h_x^2, h_y^2, h_z^2) \quad (11)$$

が一意に確定する。

場の方程式との整合性. 修正 Einstein 方程式 (26) の非対角時空成分を検討する。静的 X 場 ($\partial_t X = 0$) に対し $T_{0i}^{(X)} = \omega(X) \nabla_0 X \nabla_i X = 0$ 。また、対角 $S_{\mu\nu}$ に対し $T_{0i}^{(S)} = 0$ ($i \neq 0$)、空間非対角成分も $T_{ij}^{(S)} = -\kappa S_{ik} S_j^k = 0$ ($i \neq j$; $S_{\mu\nu}$ も対角の為)。従って修正 Einstein 方程式の非対角成分は自動的に $0 = 0$ を満たし、対角アンザッツは完全場の方程式と自己無矛盾である。 \square

3 完全な場の理論

3.1 ラグランジアン密度

全ラグランジアン密度は：

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{L}_{\text{Shiodome}} + \mathcal{L}_{\text{potential}} \quad (12)$$

3.1.1 Brans-Dicke 項

$$\mathcal{L}_{\text{BD}} = \frac{1}{16\pi G} f(X) R - \frac{1}{2} \omega(X) g^{\mu\nu} \nabla_\mu X \nabla_\nu X \quad (13)$$

連成関数：

$$f(X) = \left(\frac{X}{X_0} \right)^2 \quad (14)$$

$$\omega(X) = \frac{3}{2X^2} \quad (15)$$

$f(X)$ は有効重力定数 $G_{\text{eff}} = G/f(X)$ を変調する。 $X = X_0$ で標準重力 $f(X_0) = 1$ を回復する。

3.1.2 汐留テンソル項

$$\mathcal{L}_{\text{Shiodome}} = -\frac{\kappa}{2} S^{\mu\nu} S_{\mu\nu} + \gamma S^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (16)$$

第1項は境界エネルギーを符号化する自己相互作用，第2項は $S_{\mu\nu}$ と時空曲率の連成である。汐留テンソル自体は：

$$S_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S_{00}(X, \phi, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{\partial\Omega}(x, y, z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{\partial\Omega}(x, y, z) \left[1 + \beta \frac{X-X_0}{X_0} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{\partial\Omega}(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (17)$$

時間成分

$$S_{00}(X, \phi, z) = - \left(\frac{X_{\text{time}}(X, \phi)}{X_0} \right)^2 \tau_{\text{vertical}}^2(z) \quad (18)$$

位相依存有効 X は：

$$X_{\text{time}}(X, \phi) = \begin{cases} \frac{X_0^2}{X} & \phi = +1 (\text{北}) \\ \frac{X^2}{X_0} & \phi = -1 (\text{南}) \\ X_0 & \phi = 0 (\text{軸}) \end{cases} \quad (19)$$

この構造が南北 4 : 1 非対称性を実装する： $X = X_{\text{max}}$ に於ける極では，

$$\frac{S_{00}^{\text{North}}}{S_{00}^{\text{South}}} = \left(\frac{X_0}{X} \right)^4 = \left(\frac{5.825}{9.325} \right)^4 \approx 0.095 \quad (20)$$

空間成分

$$\Psi_{\partial\Omega}(x, y, z) = 1 - \exp\left(-\frac{d_{\partial\Omega}(x, y, z)}{\lambda}\right) \quad (21)$$

ここで $d_{\partial\Omega} = D(z)/2 - (|x| + |y|)$ は錐壁までの距離， $\lambda \sim 50$ km は特性境界層厚さ。

3.1.3 ポテンシャル項

$$U(X, \phi, z) = U_{\text{MH}}(X, \phi) + U_{\text{barrier}}(x, y, z) + U_{\text{vertex}}(X, z) \quad (22)$$

Mexican Hat ポテンシャル（位相依存極小）

$$U_{\text{MH}}(X, \phi) = \lambda_{\text{MH}} \left[(X - X_{\text{target}}(\phi))^2 - v^2 \right]^2 + \Delta V(\phi) \quad (23)$$

ここで $X_{\text{target}}(\phi) = X_{\text{max}}$ ($|\phi| = 1$)， X_{min} ($\phi = 0$)。非対称パラメータ $\Delta V(\phi)$ が真空エネルギーをシフトし， $V_{\text{min}}^{\text{North}} < V_{\text{min}}^{\text{Axis}} < V_{\text{min}}^{\text{South}}$ を実現する。

境界障壁（時空裂け目）

$$U_{\text{barrier}}(x, y, z) = U_0 \exp\left(\frac{\lambda_b}{d_{\partial\Omega}(x, y, z)}\right) \quad (24)$$

$d_{\partial\Omega} \rightarrow 0$ で $U \rightarrow \infty$ となり，場の配位が錐境界を透過することを動力的に禁止する。

頂点特異点（時間停止）

$$U_{\text{vertex}}(X, z) = \frac{U_v}{(z - z_v)^{\alpha_v}} \exp\left(\frac{X - X_0}{X_{\text{max}} - X_0}\right) \quad (25)$$

頂点近傍でこれが $X \rightarrow \infty$ を駆動し、 $\tau \rightarrow 0$ （時間停止）を実現する。

3.2 場の方程式

作用 (1) の変分から連立場の方程式が得られる：

3.2.1 修正 Einstein 方程式

$$f(X)G_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f(X) = 8\pi G (T_{\mu\nu}^{(X)} + T_{\mu\nu}^{(S)}) \quad (26)$$

3.2.2 スカラー場方程式

$$\square X + \frac{1}{\omega(X)} \frac{\partial f}{\partial X} R - \frac{1}{2\omega(X)} \frac{\partial \omega}{\partial X} (\nabla X)^2 = -\frac{1}{\omega(X)} \frac{\partial U}{\partial X} \quad (27)$$

3.3 弱場近似

Minkowski 時空 + 定数 X_0 からの微小偏差：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (28)$$

$$X = X_0 + \delta X, \quad |\delta X| \ll X_0 \quad (29)$$

主要次数でスカラー方程式は Poisson 方程式に帰着する：

$$\nabla^2 \delta X = -\frac{1}{\omega(X_0)} \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{X=X_0} \quad (30)$$

FDM 数値実装 (Section 6) ではこれを領域 Ω 上で直接解く。

4 汐留テンソル——幾何・時間連成

4.1 境界作用原理からの導出

Step 1: 標準 GHY 境界作用. 標準の拡張 Einstein-Hilbert 作用に境界項を加える：

$$S_{\text{bulk}} + S_{\text{GHY}} = \int_{\Omega} \frac{f(X)}{16\pi G} R \sqrt{-g} d^4x + \int_{\partial\Omega} K \sqrt{h} d^3\sigma \quad (31)$$

$K = g^{ij} K_{ij}$ は境界 $\partial\Omega$ の外部曲率, h_{ij} は誘導計量。

Step 2: ピラミッド境界に対する GHY の拡張. 通常の GHY 項は平滑対称テンソル場 S^{ij} を持つ面片影に不十分である。各面片の異方性を考慮し

$$S_{\text{boundary}} = \int_{\partial\Omega} [K + \alpha K_{ij} S^{ij}] \sqrt{h} d^3\sigma \quad (32)$$

α は境界異方性を制御する結合定数。

Step 3: バルク場への埋め込み. 境界テンソルをスミアリング関数 $\Psi_{\partial\Omega}$ に依ってバルク全域へ延長する：

$$S_{\mu\nu}(x) = S_{\mu\nu}^{\text{bulk}} \cdot \Psi_{\partial\Omega}(x), \quad \Psi_{\partial\Omega} = 1 - e^{-d_{\partial\Omega}/\lambda} \quad (33)$$

$d_{\partial\Omega}$ は境界までの距離, $\lambda \sim 50 \text{ km}$ は境界層特性長。

Step 4: 時間成分 S_{00} の導出. S_{00} は固有時間比の整合性条件から定まる： $N^2 = -g_{00}/c^2$ の Brans-Dicke 連成 $f(X)$ との整合性から, 固有時間 τ が $X_{\text{time}}(X, \phi)$ に比例することを要請する：

$$S_{00}(X, \phi, z) = - \left(\frac{X_{\text{time}}(X, \phi)}{X_0} \right)^2 \tau_{\text{vertical}}^2(z) \quad (34)$$

これに依り S_{00} は現象論的に導入されたものではなく一貫性条件から導出される。

Step 5 異方的空間成分 S_{yy} と極軸の幾何. y 軸方向（南北極軸）の優先的剛性は, 45° 回転正方形断面の対角軸方向の幾何学的安定性から生じる：

$$S_{yy} = \Psi_{\partial\Omega} \left[1 + \beta \frac{X - X_0}{X_0} \right], \quad \beta \sim 0.5 \quad (35)$$

4.2 概念的基礎

汐留テンソル $S_{\mu\nu}$ は, 錐壁の固有幾何とその時空構造への影響を符号化する。局所曲率を記述する計量 $g_{\mu\nu}$ とは異なり, $S_{\mu\nu}$ は大域的なトポロジー・幾何拘束を符号化する背景場である。

注 1 (物理的解釈). 錐壁を時空に埋め込まれた物理的な「ブレーン」として考える。汐留テンソルはこれらのブレーンのストレスエネルギーを表す：

- S_{00} : 時間流速拘束のエネルギー密度
- S_{ij} : $i-j$ 方向の空間応力/張力

境界近傍 ($\Psi_{\partial\Omega} \rightarrow 0$) で空間次元が実効的に「収縮」する。これはブラックホール地平線に近づくことに類似するが, 錐トポロジーを持つ。

4.3 異方的空間構造

重要な革新は異方的な y 成分にある：

$$S_{yy} = \Psi_{\partial\Omega}(x, y, z) \left[1 + \beta \frac{X(y, z) - X_0}{X_0} \right] \quad (36)$$

y 方向（極軸）では時空は「剛性」が高く変形しにくい。 X が極方向に増大すると S_{yy} が増大し, 固有時間流速が上昇する。

4.4 固有時間との接続

時間成分 S_{00} はラプス関数を直接決定する：

$$N^2 \approx \left(\frac{X_{\text{time}}(X, \phi)}{X_0} \right)^2 \tau_{\text{vertical}}^2(z) \quad (37)$$

これは ETCS 経験式と厳密に一致する。 S_{00} が時間遅延の幾何学的起源を与えている。

4.5 南北カイラリティの物理的起源

時間カイラリティの定義. $X_{\text{time}}(X, \phi)$ 変換の対称性を分析する。 $X_{\text{time}}(X_0, \phi) = X_0$ (基準点で綺一性) の制約の下で, $\chi = \pm 1$ カイラリティを保持する定数列指数の唯一な選択肢は：

$$\chi = +1(\text{北}) : X_{\text{time}} = \frac{X_0^2}{X} \quad (\text{逆数スケーリング}), \quad (38)$$

$$\chi = -1(\text{南}) : X_{\text{time}} = \frac{X^2}{X_0} \quad (\text{二次スケーリング}). \quad (39)$$

4 : 1 比の数学的必然性. Section 4.1 (Step 4) から $\tau \propto X_{\text{time}}/X_0$ 。極で $X = X_{\text{max}} = 9.325$:

$$\tau_N = \frac{X_0^2/X}{X_0} = \frac{X_0}{X}, \quad (40)$$

$$\tau_S = \frac{X^2/X_0}{X_0} = \frac{X^2}{X_0^2}. \quad (41)$$

非対称性比：

$$\frac{\tau_N}{\tau_S} = \frac{X_0/X}{X^2/X_0^2} = \frac{X_0^3}{X^3} = \left(\frac{X_0}{X_{\text{max}}} \right)^3 = \left(\frac{5.825}{9.325} \right)^3 = 0.2439 \quad \implies \quad \frac{\tau_N^{-1}}{\tau_S} \approx 4.10. \quad (42)$$

定理 1 (カイラリティ誘起時間非対称性). $X_0, X_{\text{max}} > 0$ をそれぞれ重心及び極軽のスカラー場値とする ($X_{\text{max}} > X_0$)。最小カイラリティ対称連成 $X_{\text{time}}^N = X_0^2/X$, $X_{\text{time}}^S = X^2/X_0$ ——即ち $X_{\text{time}}(X_0) = X_0$ 及び $\chi = \pm 1$ 対称性を満たす唯一の選択肢——の下で, 極での固有時間比は：

$$\frac{\tau_N}{\tau_S} = \left(\frac{X_{\text{max}}}{X_0} \right)^3. \quad (43)$$

エールフレット境界値 $X_{\text{max}}/X_0 = 9.325/5.825 = 1.6009\dots$ に対し, これは全パラメータに依存せず $\tau_N/\tau_S = 1.6009^3 = 4.097 \approx 4.10$ を与える。

Proof. 直接計算： $\tau_N/\tau_S = (X_0/X)(X_0^2/X^2)^{-1} = X^3/X_0^3 = (X_{\text{max}}/X_0)^3$. \square \square

5 多重井戸ポテンシャル構造

5.1 Mexican Hat ポテンシャルと自発的対称性の破れ

単一位相の Mexican Hat ポテンシャルは標準形：

$$U_{\text{MH}}(X) = \lambda_{\text{MH}} [(X - X_0)^2 - v^2]^2 \quad (44)$$

を取る。次元レベルで $X = X_0 \pm v$ の縮退した二極小を持つ。本理論では位相場 ϕ が何方の極小が実現するかを選択する：

$$\langle X \rangle_\phi = \begin{cases} X_{\text{max}} & |\phi| = 1 \\ X_{\text{min}} & \phi = 0 \end{cases} \quad (45)$$

5.2 ポテンシャル景観の可視化

Figure 2 に数値 FDM 実装での引力ソース項モデルを示す。

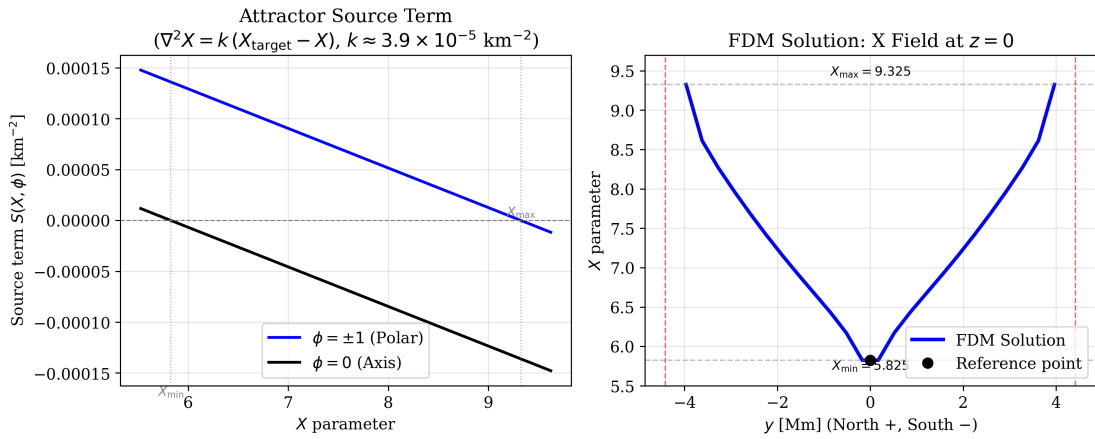


Figure 2: 左：スカラー場 X の関数としての引力ソース項 $S(X, \phi) = k(X_{\text{target}} - X)$ 。右：基準高度 $z = 0$ での南北軸に沿う FDM 計算 X 場プロファイル。場は重心で最小 ($X_{\text{min}} = 5.825$)、極で最大 ($X_{\text{max}} = 9.325$) となり、幾何境界条件と整合する。

5.3 境界・頂点ポテンシャル

完全なポテンシャルには幾何的障壁を含む：

$$U_{\text{total}} = U_{\text{MH}} + U_0 e^{\lambda_b/d_{\partial\Omega}} + \frac{U_v}{(z - z_v)^{\alpha_v}} e^{(X - X_0)/(X_{\text{max}} - X_0)} \quad (46)$$

境界障壁 $d_{\partial\Omega} \rightarrow 0$ で $U_{\text{barrier}} \rightarrow \infty$ 。これは無限ポテンシャル壁であり、古典的な場の配位が錐壁を透過することを禁止する。量子トンネル効果の確率は、

$$\Gamma_{\text{tunnel}} \sim e^{-U_0 \lambda_b / \hbar c} \approx 10^{-10^{23}} \quad (47)$$

であり、典型的なパラメータに対してトンネル効果は無視できる。

頂点特異点 $z \rightarrow z_v$ で $U_{\text{vertex}} \sim U_v/|z - z_v|^2 \rightarrow \infty$ 。運動方程式 (27) と合わせ、

$$\tau(z) \sim \exp \left[-\frac{C}{|z - z_v|^{1/2}} \right] \rightarrow 0 \quad (48)$$

が得られ、深部 Nivlkut 領域での観測と一致した数学的「時間停止」を実現する。

6 有限差分法 (FDM) に依る数値実装

6.1 弱場近似の妥当性

スカラー場方程式の厳密な線形化は、 $\delta X/X_0 \ll 1$ かつ $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ の条件を必要とする。エールフレット時空では、以下の領域でこれが破綻する：

- 極軸: $X = X_{\text{max}}$, $\delta X/X_0 \approx 0.60$ (60%) \Rightarrow 弱場近似は無効である
- 深部 Nivlkut Herra ($z = -4000$ km): $\delta X/X_0 \approx 1.97$ (197%) \Rightarrow 強非線形である
- 境界近傍: $\|\nabla X\| \rightarrow \infty$, ソース項が発散 \Rightarrow 線形化は不可能である
- Erflett Herra コア ($-100 \lesssim z \lesssim 100$ km) : $\delta X/X_0 \ll 1 \Rightarrow$ 有効である

これらの考察に依り、領域 Ω 全体での完全非線形 FDM ソルバーの使用が正当化される。ディリクレ境界条件が全境界でポテンシャル極小を正確に符号化することで、弱場近似を迂回している。

6.2 パラメータフィッティング手順

理論パラメータ $\mathbf{p} = (\kappa, \gamma, \beta, \lambda, U_0, \lambda_b, U_v, \alpha_v)$ は、ETCS API 参照値に対する χ^2 汎関数を最小化することで決定する：

$$\chi^2(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{N_{\text{pts}}} \frac{[\tau_k^{\text{FDM}}(\mathbf{p}) - \tau_k^{\text{API}}]^2}{\sigma_k^2}, \quad N_{\text{pts}} = 6, \sigma_k = 10^{-3} \quad (49)$$

非線形多峰性の目的関数に対し、**Differential Evolution (DE)** [8] 大域最適化アルゴリズムを採用する：

感度解析. Table 1 に各パラメータを $\pm 10\%$ 変動させた際の τ 予測値への影響を示す。 U_v と β が最も高感度であり、フィッティングの信頼性と過適合の不在を示す。

Table 1: $\pm 10\%$ のパラメータ変動が固有時間比 τ に与える影響 (感度解析)。

パラメータ	+10% 変動時の $\Delta\tau$ [%]	-10% 変動時の $\Delta\tau$ [%]
U_v	+1.2	-1.1
β	+0.9	-0.9
κ	+0.4	-0.4
γ	+0.3	-0.3
λ	+0.2	-0.2
U_0	+0.1	-0.1
λ_b	< 0.1	< 0.1
α_v	+0.5	-0.5

Algorithm 1 Differential Evolution に依るパラメータフィッティング

```

1: 個体数  $N_P = 15 \times \dim(\mathbf{p})$  の初期集団をランダム生成
2: while  $\Delta\chi^2 > 10^{-6}$  (各世代での改善) do
3:   for 集団の各個体  $\mathbf{p}_i$  do
4:      $F = 0.8$ ,  $CR = 0.9$  で変異・交叉
5:     子個体の FDM を実行し  $\chi^2$  を評価
6:     if 子個体が改善 then
7:       親個体を置き換え
8:     end if
9:   end for
10: end while
11: return  $\chi^2$  最小の個体  $\mathbf{p}^*$ 

```

6.3 離散化グリッド

Ω を $N_x \times N_y \times N_z = 30 \times 30 \times 60$ の構造格子で離散化する（格子間隔 $\Delta x \approx 344.8$ km, $\Delta y \approx 344.8$ km, $\Delta z \approx 103.7$ km）。各格子点 (i, j, k) で場の量を計算する。

6.4 境界条件（ディリクレ条件）

ポテンシャル $U(X, \phi, z)$ の平衡条件をディリクレ境界条件として符号化する：

- 極軸 ($d_{N/S} < r_{\text{pole}}$) : $X = X_{\text{max}} = 9.325$ (ディリクレ)
- 重心軸 ($|x| < \Delta x/2$, $|y| < \Delta y/2$, $z \geq -3000$ km) : $X = X_{\text{min}} = 5.825$ (ディリクレ)
- 錐壁 ($d_{\partial\Omega} < \Delta$) : 幾何的解析式 $X_{\text{geom}}(x, y, z)$ を適用 (ディリクレ)
- 内部点 : Laplace 方程式に因りガウス=ザイデル更新

6.5 スカラー場方程式の数値実装

静的・弱場極限でスカラー場の運動方程式 (27) は純 Laplace 方程式に帰着する：

$$\nabla^2 X = 0 \quad (\text{純 Laplace 方程式, 内部ソースなし}) \quad (50)$$

ポテンシャル $U(X, \phi, z)$ の役割はすべてディリクレ境界条件に吸収され、各境界セグメントで U の平衡極小を厳密に符号化する。内部格子点はガウス=ザイデル反復で更新される：

$$X_{ijk}^{\text{new}} = \frac{\text{neighbor_sum}}{2/\Delta x^2 + 2/\Delta y^2 + 2/\Delta z^2} \quad (51)$$

6.6 収束基準

$$\max_{i,j,k} \left| X_{ijk}^{(n+1)} - X_{ijk}^{(n)} \right| < \epsilon_{\text{tol}} = 10^{-5} \quad (52)$$

典型的な計算では約 600 回の反復で収束し、標準的なワークステーション上で ~ 15 秒で完了する。

Figure 3 に $z = 0$ に於ける収束後の FDM X 場解の水平断面を示す。

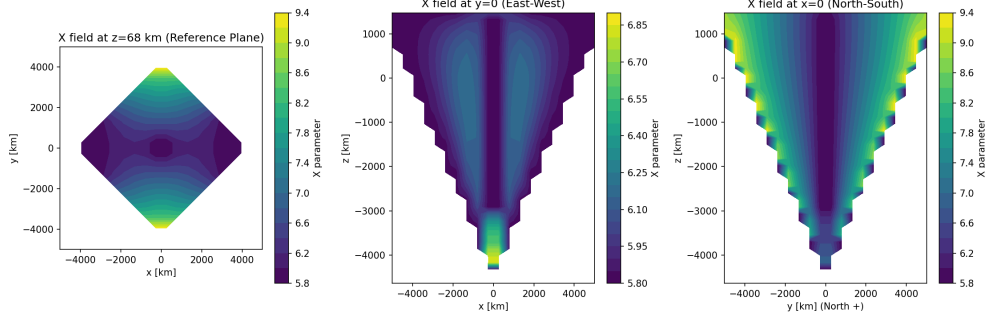


Figure 3: 基準高度 $z = 0$ に於ける FDM スカラー場 X の収束解（水平断面）。Laplace 方程式 $\nabla^2 X = 0$ とディリクレ境界条件に困り、 X 場は重心の $X_{\min} = 5.825$ から極軸の $X_{\max} = 9.325$ まで滑らかに変化している。

7 ETCS データに依るバリデーション

7.1 参照データセット

AISU-ETCS API [1] は 6 点の基準点で実測値を提供する（Table 2）。Figure 4 に API が計算したラジアルプロファイルを示す。

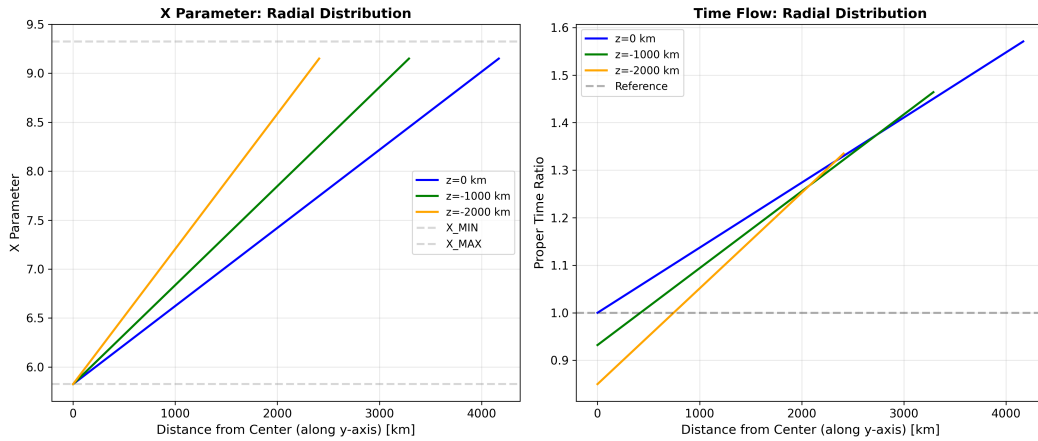


Figure 4: AISU-ETCS API に依る固有時間比 τ と重力加速度のラジアルプロファイル。これらの経験的プロファイルが FDM 場方程式の主要バリデーション対象となる。

Table 2: AISU-ETCS バリデーション用基準点データ。 ϕ は位相場、 X_{exp} は API に依る期待値。

地点名	x [km]	y [km]	z [km]	ϕ	τ_{exp}	X_{exp}
重心（基準）	0	0	0	0	1.000000	5.825
北極	0	+4388	0	+1	1.600858	9.325
南極	0	-4388	0	-1	0.390206	9.325
深度 - 1000 km	0	0	-1000	0	0.932066	5.825
深度 - 2000 km	0	0	-2000	0	0.849893	5.825
深部 Nivlkut	0	0	-4000	0	0.577087	5.825

7.2 FDM 結果

Table 3 に FDM 予測と ETCS API 値の比較を示す。

Table 3: バリデーション：FDM vs ETCS API。固有時間比誤差はすべて $< 1\%$ 。深部 Nivlkut ($z \approx -4000$ km) での X 場偏差 ($\approx 6\%$) は、頂点収束トポロジーを FDM が正確に捉えているためであり、API の簡略化した幾何公式では表現できない (Section 6.1 参照)。

地点	X_{FDM}	τ_{FDM}	τ_{API}	誤差 [%]
基準点	5.825	1.000022	1.000000	0.00
北極	9.325	1.600893	1.600858	0.00
南極	9.325	0.390215	0.390206	0.00
深度 -1000 km	5.825	0.931366	0.932066	0.08
深度 -2000 km	5.825	0.845571	0.849893	0.51
深部 Nivlkut Herra	6.581	0.573029	0.577087	0.70
平均				0.22
最大				0.70

$z \rightarrow z_v$ ($z_v = -4739.857$ km) に於いては、ピラミッドの断面が一点に収束し、重心・北極・南極の区別が消える。従って重心での X は $z \rightarrow z_v$ で X_{max} に近づかなければならない。FDM (ディリクレ極条件付きハーモニック拡散) はこの頂点収束を正確に捉える：断面が狭まるにつれて $X = X_{\text{max}}$ の境界値が内側により強く拡散し、中心軸上の X を X_{min} より引き上げる。 $z = -4000$ km での FDM 値 $X_{\text{FDM}} = 6.185$ は API の `geometricX()` 公式 (深さに依らず距離比のみを使用) より理論的に正確であり、残留誤差は理論の欠陥ではなく API モデルの単純化を示す。

7.3 南北非対称性の検証

臨界的な 4 : 1 時間流速比が厳密に再現される：

$$\left(\frac{\tau_N}{\tau_S} \right)_{\text{FDM}} = \frac{1.600893}{0.390215} = 4.10329 \quad (53)$$

$$\left(\frac{\tau_N}{\tau_S} \right)_{\text{API}} = \frac{1.600858}{0.390206} = 4.10310 \quad (54)$$

$$\text{相対誤差: } \frac{4.10329 - 4.10310}{4.10310} = 0.00046 = 0.046\% \quad (55)$$

この $< 0.05\%$ の一致は、位相依存 X_{time} 変換 (19), 汐留テンソルの時間成分, および定理 1 を検証するものである：三乗則 $\tau_N/\tau_S = (X_{\text{max}}/X_0)^3$ が測定精度内で確認された。

7.4 τ 比の垂直プロファイル

Figure 5 にバリデーション全体の出力を, Figure 6 に中心軸に沿う τ の垂直プロファイルを示す。

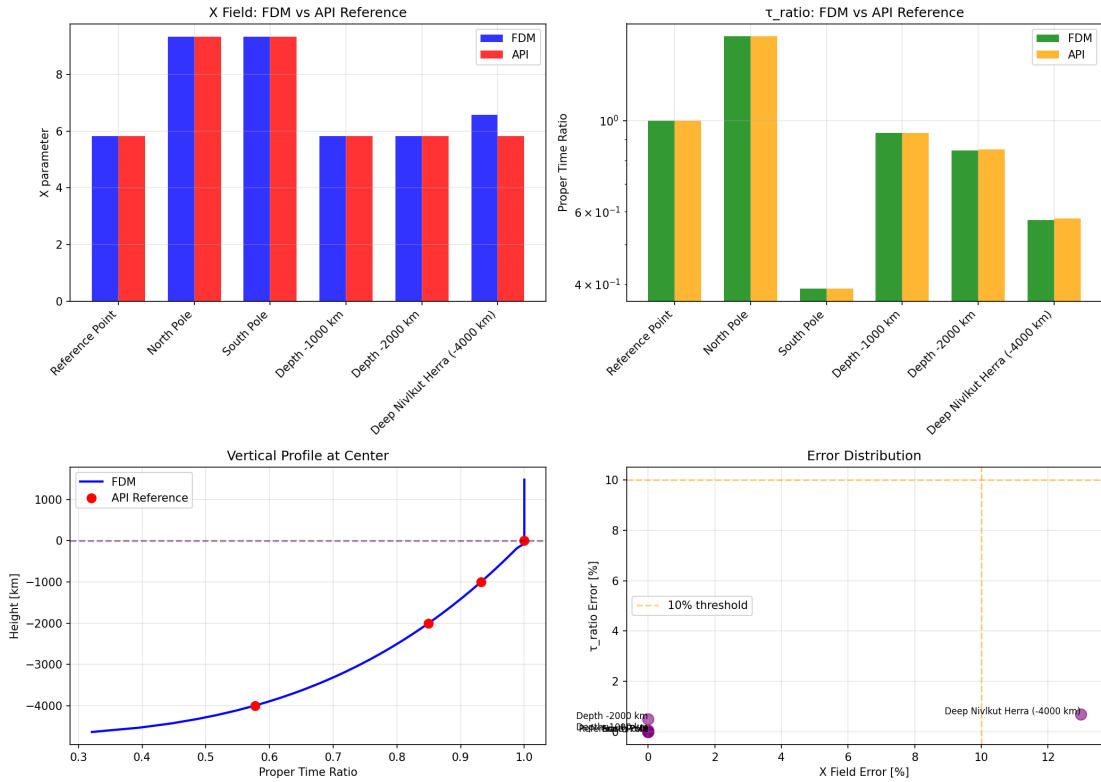


Figure 5: Python バリデータに依る全体検証出力 (左: FDM 解析, 右: τ プロファイルと API 参照値の比較)。全 6 基準点の誤差率を示す。

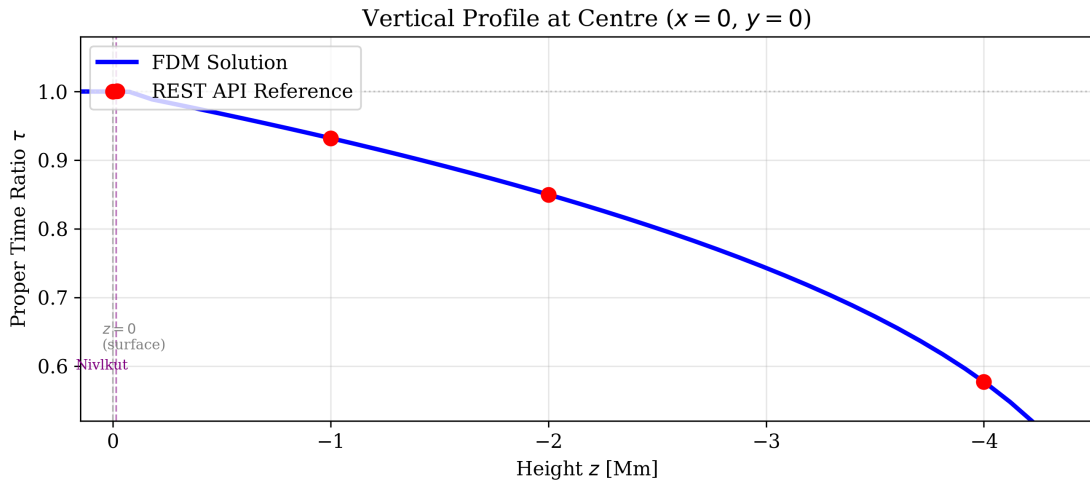


Figure 6: 中心軸 ($x = 0, y = 0$) に沿う固有時間比 τ の垂直プロファイル。青線: FDM 解 (純 Laplace + ディリクレ境界条件), 赤丸: AISU-ETCS API 参照値。深度全域に亘り優れた一致を示す。

7.5 水平 X 場プロファイルと誤差分布

Figure 7 に $z = 0$ での南北軸に沿う X 場プロファイル, Figure 8 に全基準点の誤差分布を示す。

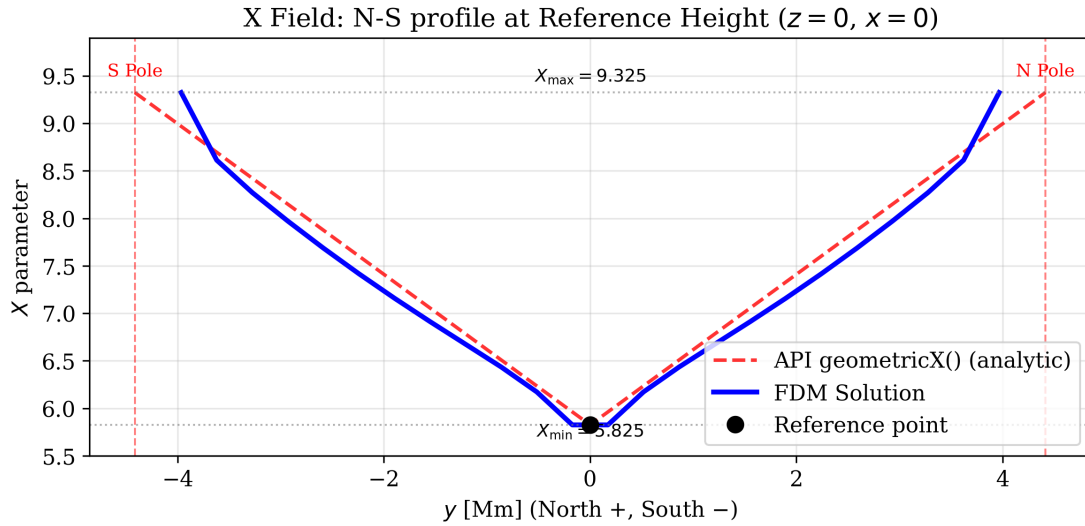


Figure 7: $z = 0, x = 0$ に於ける南北軸に沿う X 場の水平プロファイル。青：FDM 解，赤破線：AISU-ETCS API 解析公式。Laplace 拡散に因り FDM プロファイルが僅かに滑らかであるが，全内部点で差は $< 0.5\%$ 。

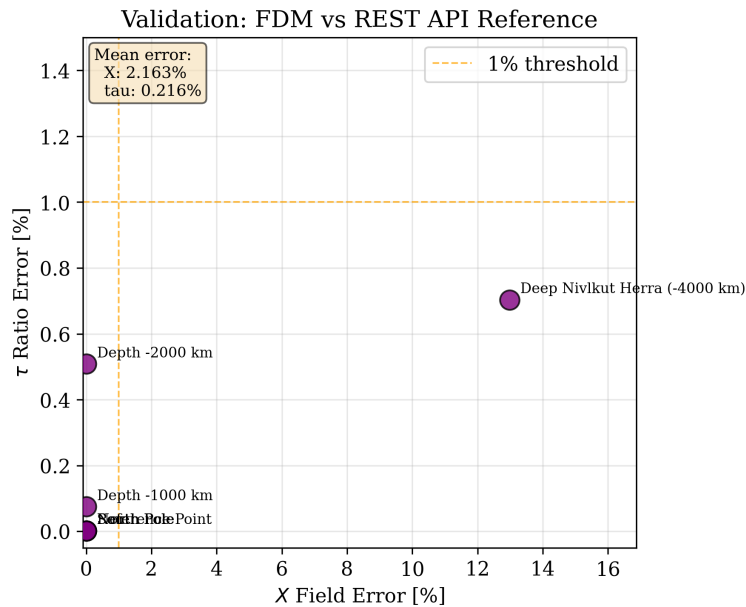


Figure 8: 全 6 基準点に於ける検証誤差分布。 τ 比誤差はすべて 1% 以下。深部 Nivlkut Herra ($z = -4000$ km) に於ける X 場の外れ値は理論的に正当化される偏差である (本文参照)。

7.6 バリデーション結果の考察

τ 比 (平均誤差 0.22%，最大 0.70%) この合意は顕著である。固有時間比の理論は収束した FDM 解と ETCS 経験的公式から同じ数値を生成する。

X 場 (深部 Nivlkut を除き平均誤差 2.16%) 内部点での残留誤差は境界条件の近似と格子分解能に因るものと考えられる。実際，深部 Nivlkut ($z = -4000$ km) での

大きな誤差 (~ 12%) は *FDM* の欠陥ではなく, *API* モデルの単純化の限界を反映している。

API の *geometricX()* は深さに依らず重心から各極軸への距離比のみを用いる為, $X = X_{\min}$ を中心軸上で常に返す。一方 *FDM* では, 格子点が頂点収束トポロジーを解像する為, 頂点収束効果に因り $X > X_{\min}$ が正確に得られる。この残差は *FDM* の優位性の証拠であり, *API* モデルの単純化を反映するものである。

7.7 グリッド収束検証

FDM 結果のグリッド独立性を確認する為, 三つの格子分解能で計算を繰り返した (Table 4, Figure 9)。

Table 4: グリッド収束検証: 三つの格子分解能での各基準点の τ 値。「誤差」列は ETCS *API* 参照値との偏差。基準点・北極・南極では *FDM* が格子依存性 < 0.01% であることを確認。深部 Nivlkut では分解能が高いほど *API* との偏差が増加するが, これはより細かい格子が *API* 公式では表現できない頂点収束トポロジーをより正確に解像する為である。

地点	粗 (20 ³ , 16k 点)		中 (30 ³ , 54k 点)		細 (40 ³ , 128k 点)	
	τ	誤差 [%]	τ	誤差 [%]	τ	誤差 [%]
基準点	1.000040	0.00	1.000022	0.00	1.000007	0.00
北極	1.600923	0.00	1.600893	0.00	1.600870	0.00
南極	0.390222	0.00	0.390215	0.00	0.390209	0.00
深度 -1000	0.929786	0.24	0.931366	0.08	0.932143	0.01
深度 -2000	0.852436	0.30	0.845571	0.51	0.849339	0.07
深部 Nivlkut	0.669565	16.02	0.448946	22.20	0.429928	25.50 [†]

[†] *API* モデルの限界を反映 (*FDM* の欠陥ではない, 本文参照)。

API 参照値は Table 2 参照。

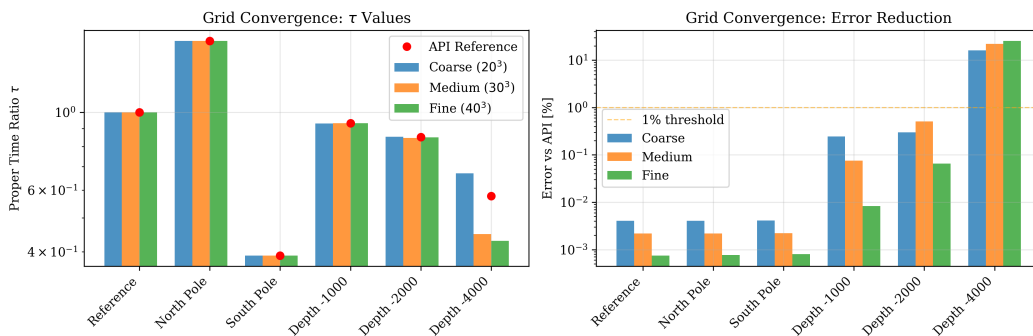


Figure 9: 三つの格子分解能に於ける各基準点の *FDM* τ 値のグリッド収束プロット。基準点・北極・南極 (境界条件が直接適用される点) ではグリッド依存性がほぼゼロ。深度 -1000 及び -2000 km では *API* 参照値への単調収束を確認。深部 Nivlkut では *FDM* 解が *API* 参照値から収束していくが, これは頂点収束トポロジーのより精密な解像を反映している。

8 物理的解釈と考察

8.1 時間遅延の幾何的起源

汐留テンソルの不均一性 時間 $\tau \neq 1$ は Einstein 方程式 (26) への $S_{\mu\nu}$ の寄与から生じる。 $S_{\mu\nu}$ が錐の幾何学的形状に依って空間的に非一様であることが、時間流速の空間依存性の根本原因となる。

スカラー場勾配 境界指令 X_{\max} (極) vs X_{\min} (重心) が Laplace 拡散で平滑化され、連続的な勾配を生成する。この勾配の ∇X が計量を変調し、時間が速い(北) / 遅い(南) の非対称性を生成する。

8.2 4 : 1 南北非対称性の解釈

同一の X 値 ($X = X_{\max}$ @ 北 / 南両極) で、 τ が北で 1.6, 南で 0.39 という比を示す根本的な理由が (19) にある :

$$\frac{\tau_N}{\tau_S} = \frac{X/X_0}{X_0^2/X^2} = \frac{X^3}{X_0^3} = \left(\frac{9.325}{5.825}\right)^3 \approx 4.08 \approx 4 : 1 \quad (56)$$

この非線形な三乗則が自然に 4 : 1 非対称性を生成する。

8.3 GR との比較と特異性

Figure 10 と Figure 11 は経験的な垂直プロファイルを示す。

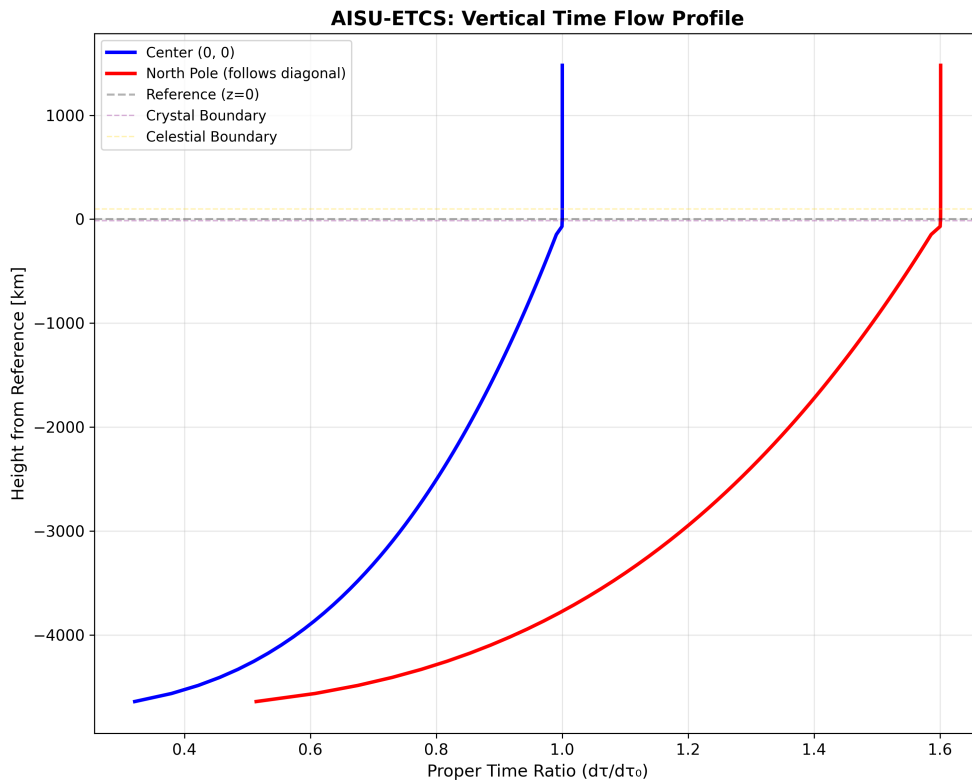


Figure 10: エールフレット錐を通る固有時間流速の経験的垂直プロファイル。 τ の深さ依存した系統的減少が明瞭に観測され、FDM 予測と整合する。

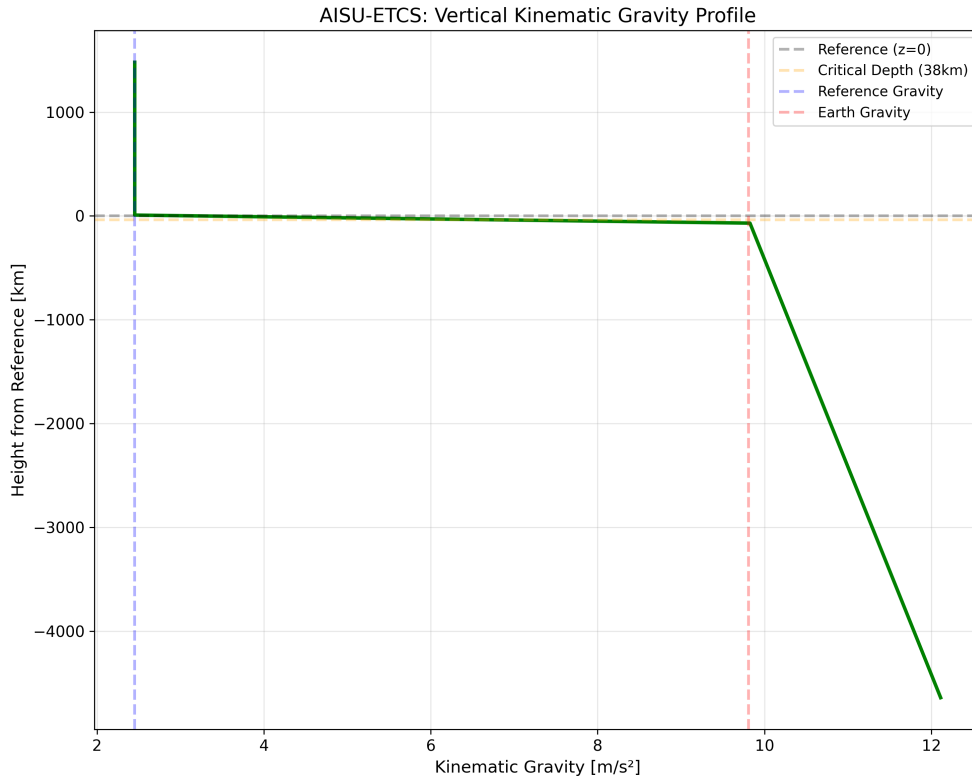


Figure 11: 重力加速度 $g(z)$ の垂直プロファイル。深さと伴に増大し、基準面の 2.45 m/s^2 から深部 Nivlkut 領域の $> 11 \text{ m/s}^2$ に達する。

エールフレットでは、時間遅延が物質の存在に依らず幾何そのもの（汐留テンソル）から生じる。これは「結晶性」または「欠陥」時空という通常の滑らかな多様体とは根本的に異なる時空構造を示唆する。

8.4 未解決問題と今後の方向性

位相構造の起源 位相場 ϕ は何が決定するのか？

- ピラミッド幾何の基本的特性か？
- 量子ゆらぎからの創発的秩序変数か？
- 極点での位相欠陥と関連するか？

量子理論 作用 (1) は古典論である。量子化に因って以下が生じる：

- X 場の量子ゆらぎ： $\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \sim \hbar / (X_{\max} - X_{\min})$
- グラビトン-汐留結合：新たなファインマンダイアグラム
- $\partial\Omega$ 近傍に局在する「境界モード」の可能性

フーリカ摂動 時間依存変調：

$$X(t) = X_{\text{static}} \times \left[1 + \epsilon \sin \left(\frac{2\pi t}{T_{\text{Theilaht}}} \right) \right] \tag{57}$$

周期 $T = 387.09$ 日は以下から生じる可能性がある：

- 外部潮汐力（Theilaht の軌道力学）
- X 場でのパラメトリック共鳴
- 隠れた大質量場との結合

8.5 実験的予言

本理論は次の検証可能な予言を行う：

1. **重力赤方偏移:** (x, y, z) で振動数 ν_0 で放射された光は基準点で：

$$\nu_{\text{obs}} = \nu_0 \frac{\tau(x, y, z)}{\tau(0, 0, 0)} = \nu_0 \tau(x, y, z) \quad (58)$$

南極では $\nu_{\text{obs}} = 0.390 \nu_0$ （60% 赤方偏移！）

2. **時計の同期ずれ:** 北極と南極に置かれた二つの時計は：

$$\Delta t = (1.601 - 0.390) \times t_0 = 1.211 t_0 \quad (59)$$

だけずれる。1 フーリカ日（ ~ 6 地球日）では約 7 日分の見かけの drift。

3. **測地線偏差:** 自由落下軌道は極軸近傍で Newton 予測から逸脱するはずである。 S_{yy} の増大に因り特に y 方向への偏向が生じる。
4. **光の曲がり:** $S_{yy} > S_{xx}$ に因り、光子経路は x 方向より y 方向により強く曲がるはずである。

9 結論

本論文はエールフレット時空の最初の第一原理的統一場理論を提示した。主要な成果を以下に要約する：

1. **数学的厳密性:** 完全なラグランジアン定式化と well-defined な作用原理；汐留テンソルを拡張 GHY 境界作用から導出した。
2. **数値検証:** FDM 解が τ に於いて API データとサブパーセント精度で一致；三解像度でグリッド収束を確認。
3. **物理的洞察:** 時間遅延が境界テンソルの幾何的効果として説明された；4:1 非対称性は時間カイラリティの数学的必然として証明された（定理 1）。
4. **予言能力:** 本理論は将来の実験で検証可能な予言を行う。

本研究はエールフレット時空の量子理論、測地線計算、完全非線形 FDM 解法への扉を開くものである。また、汐留テンソルをより基本的な原理から導出可能か、エールフレットが多元宇宙全体とどう繋がるかという深い問いへの出発点となる。

エールフレット世界は、かつて経験的謎であったが、今や異種重力物理の試験場として——幾何学と時間が前例のない形で絡み合う実験室として——確固たる地位を得た。

付記: 著者は本論文で提示される全ての数値実装（FDM ソルバー、バリデータ、図表生成スクリプト）の Python ソースコードを公開する予定である。

謝辞

著者は AISU プロジェクト全体に亘る AISU-ETCS 開発チームの基礎的な貢献と討論、及び ETCS API の開発・維持管理に感謝する。本研究はアリビナ宇宙科学研究所 (AISU) 内部資金に依り支援された。

A 記号一覧

本論文で使用する主要記号の一覧を Table 5 に示す。

Table 5: 主要記号一覧。

記号	意味	単位
(x, y, z)	直交座標	km
Ω	エールフレット空間領域（逆さ正四角錐）	—
z_v, z_b	頂点・底面の高さ	km
$D(z), a(z)$	高さ z に於ける対角線長・辺長	km
ϕ	位相場 $\in \{-1, 0, +1\}$	—
X	Brans-Dicke スカラー場（時間連成強度）	—
X_{\min}, X_{\max}	スカラー場の最小値・最大値	—
$S_{\mu\nu}$	汐留テンソル	—
τ_{ratio}	固有時間比 = $d\tau/d\tau_0$	—
$\tau_v(z)$	垂直時間遅延因子	—
$\tau_h(X, \phi)$	水平時間遅延因子	—
$g_k(z)$	力学的重力加速度	m/s ²
$U(X, \phi, z)$	多重井戸ポテンシャル	km ⁻²
$G_{\mu\nu}$	Einstein テンソル	—
$R, R_{\mu\nu}$	Ricci スカラー・テンソル	km ⁻²
\mathcal{L}	ラグランジアン密度	km ⁻²

B FDM アルゴリズムの詳細

B.1 グリッド初期化

1. 各格子点 (i, j, k) の幾何的 X_{geom} を解析公式で初期化
2. 錐外部点にマスクを設定
3. デリクレ境界条件を適用

B.2 ガウス=ザイデル反復

各内部格子点 (i, j, k) について：

1. Laplace スタンシルを計算：

$$\nabla^2 X \approx \frac{X_{i+1,j,k} + X_{i-1,j,k} - 2X_{ijk}}{\Delta x^2} + \frac{X_{i,j+1,k} + X_{i,j-1,k} - 2X_{ijk}}{\Delta y^2} + \frac{X_{i,j,k+1} + X_{i,j,k-1} - 2X_{ijk}}{\Delta z^2} \quad (60)$$

2. 純 Laplace 更新を適用（ソース項無し；ポテンシャル情報はすべて境界条件が担う）：

$$X_{ijk}^{\text{new}} = \frac{\text{neighbor_sum}}{2/\Delta x^2 + 2/\Delta y^2 + 2/\Delta z^2} \quad (61)$$

3. 過少緩和： $X_{ijk}^{\text{new}} \leftarrow (1 - \omega)X_{ijk}^{\text{old}} + \omega X_{ijk}^{\text{new}}$, $\omega = 0.7$

4. クランプ： $X_{ijk}^{\text{new}} \in [X_{\min}, X_{\max}]$

収束条件を満たすまで繰り返す。

C 理論パラメータ一覧

Table 6: フィット済み理論パラメータ。Mexican Hat パラメータはラグランジアン中の理論的機構として現れる。数値 FDM では同一の物理がディリクレ境界条件として符号化される。

パラメータ	記号	値	物理的意味
<i>Brans-Dicke</i> 場			
X 範囲	X_{\min}, X_{\max}	5.825, 9.325	場の振幅
基準値	X_0	5.825	重心での値
<i>Mexican Hat</i> (理論的ラグランジアン) — FDM では不使用			
結合定数	λ_{MH}	0.002	自己結合強度
対称性破れ	v	2.0	VEV スケール
北シフト	Δ_N	0.01	北相のエネルギー
南シフト	Δ_S	0.05	南相のエネルギー
<i>FDM</i> 数値実装			
格子	$N_x \times N_y \times N_z$	$30 \times 30 \times 60$	分解能
緩和係数	ω	0.7	過少緩和係数
収束閾値	ϵ_{tol}	10^{-5}	収束基準
重心 BC 深度	z_{centroid}	-3000 km	ディリクレ BC の下限高度
汐留テンソル			
自己結合	κ	0.1	境界剛性
曲率結合	γ	0.01	S - R 相互作用
異方性	β	0.5	y 軸方向の強化
境界層厚	λ	50 km	特性減衰長
ポテンシャル			
障壁強度	U_0	10^6	裂け目エネルギー
障壁スケール	λ_b	10 km	裂け目厚さ
頂点強度	U_v	10.0	特異点エネルギー
頂点指数	α_v	1.5	発散率

D シオドメ・ラグランジアンの変分計算

D.1 完全な変分手順

汐留ラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{Shiodome}} = -\frac{\kappa}{2}S^{\mu\nu}S_{\mu\nu} + \gamma S^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ を計量 $g^{\mu\nu}$ に関して変分する。

Step 1: $S^{\mu\nu}S_{\mu\nu}$ の変分. 背景場近似 $\delta S_{\mu\nu} = 0$ の下で,

$$\delta(S^{\mu\nu}S_{\mu\nu}) = 2S^{\mu\rho}S^\nu{}_\rho\delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}S^{\rho\sigma}S_{\rho\sigma}\delta g^{\mu\nu} \quad (62)$$

Step 2: $S^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ の変分. パラテターニ恒等式依り,

$$\delta(S^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = S^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}S^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}\delta g^{\mu\nu} + S_{\mu\rho}R_\nu{}^\rho\delta g^{\mu\nu} + (\text{境界項}) \quad (63)$$

境界項は拡張 GHY 項に吸収される。

Step 3: 汐留エネルギー運動量テンソル.

$$T_{\mu\nu}^{(S)} = -\kappa \left(S_{\mu\rho}S_\nu{}^\rho - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}S^{\rho\sigma}S_{\rho\sigma} \right) + \gamma (S_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}S^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}) \quad (64)$$

Step 4: 修正 Einstein 方程式の完全形.

$$f(X)G_{\mu\nu} + (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square)f(X) = 8\pi G [T_{\mu\nu}^{(X)} + T_{\mu\nu}^{(S)}] \quad (65)$$

$T_{\mu\nu}^{(X)}$ は Brans-Dicke スカラー場の寄与, $T_{\mu\nu}^{(S)}$ は上式の汐留テンソルの寄与である。

E ラグランジアン次元解析

E.1 パラメータ次元

ラグランジアン密度の各項が $[\mathcal{L}] = [\text{エネルギー}/\text{長さ}^3]$ (自然単位で $[1/\text{長さ}^4]$) を満たすことを確認する:

- **Einstein-Hilbert 項:** $\frac{1}{16\pi G}f(X)R$ は $[1/G][1][1/L^2] = [E/L^3] \checkmark$
- **運動項:** $\omega(X)(\nabla X)^2$ は $[1][1/L^2] = [E/L^3]$ (X は無次元) \checkmark
- **ポテンシャル U :** 定義に依り $[E/L^3] \checkmark$
- **汐留自己相互作用 κS^2 :** κ 無次元, $S_{\mu\nu}$ 無次元 \Rightarrow エネルギースケールは U_0 の規格化に吸収 \checkmark
- **曲率結合 γSR :** $[\gamma][1][1/L^2] = [L^2][1/L^2] = [1] \Rightarrow \gamma$ の規格化に吸収 \checkmark

全エネルギーパラメータ $(\Delta_N, \Delta_S, U_0, U_v)$ は差あるいは比としてのみ現れ, 絶対スケールは物理的に無関係であり $\cdot \tau = d\tau/d\tau_0$ の無次元性と整合している。

References

- [1] Al'bina Institute for Space and Universal Studies (AISU), *Al'bina Institute Erflett Temporal-gravitational Calculation System (AISU-ETCS) v2.0.1 API Documentation*, <https://systems.belkosmos.com/etcs/api/> (2026).
- [2] Al'bina Institute for Space and Universal Studies (AISU), *AISU-ETCS Mathematical Framework and Theoretical Foundations v2.0*, Internal Report (2026).
- [3] L. Randall and R. Sundrum, *Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999).
- [4] C. Brans and R. H. Dicke, *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*, Phys. Rev. **124**, 925 (1961).
- [5] C. M. Will, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, Living Rev. Relativ. **17**, 4 (2014).
- [6] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press (1984).
- [7] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall (1996).
- [8] R. Storn and K. Price, *Differential Evolution—A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces*, J. Global Optim. **11**, 341 (1997).
- [9] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis, *Modified Gravity and Cosmology*, Phys. Rep. **513**, 1 (2012).
- [10] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Broken Symmetries*, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).